

## **Как семиклассники выполнили диагностическую работу по математической грамотности в 2021-22 учебном году**

### **Что такое математическая грамотность и чем задания для ее оценки отличаются от обычных заданий по математике?**

Подходы к разработке измерительных материалов заданий для оценки математической грамотности основаны на концепции международного исследования PISA (Programme for International Students Assessment), которое проводится раз в три года и отвечает на вопрос «Обладают ли учащиеся 15-летнего возраста, получившие обязательное общее образование, знаниями и умениями, необходимыми им для полноценного функционирования в современном обществе, т.е. для решения широкого диапазона задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений?».

За основу подготовки краевой диагностической работы для 7 класса была взята спецификация диагностических работ по математике для учащихся 8-х и 9-х классов, разработанная коллективом сотрудников ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» под общим руководством Г.С. Ковалевой, и скорректированная с учетом возраста и изученного ко II четверти 7 класса материала.

Авторы международного исследования PISA определили математическую грамотность как **«способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане»**<sup>1</sup>.

Для оценки математической грамотности предлагаются не типичные учебные математические задачи, характерные для проверки математической подготовки, а близкие к реальным проблемные ситуации, представленные в некотором контексте и разрешаемые доступными ученику средствами математики.

Структуру инструментария определяют «три компонента:

- *контекст*, в котором представлена проблема;
- *содержание математического образования*, которое используется в заданиях;
- *мыслительная деятельность (компетентностная область)*, необходимая для того, чтобы связать контекст, в котором представлена проблема, с математическим содержанием, необходимым для её решения»<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Результаты международного исследования PISA 2015 (краткий отчет на русском языке) [Электронный ресурс]. URL: [http://centeroko.ru/pisa15/pisa15\\_pub.html](http://centeroko.ru/pisa15/pisa15_pub.html)

<sup>2</sup> Рослова Л. О., Краснянская К. А., Квитко Е. С. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. Т. 1, № 4 (61). С. 58–79.

## Особенности заданий<sup>3</sup>

- При оценке математической грамотности задача ставится вне предметной области, но решается с помощью предметных знаний, с учетом жизненного опыта и здравого смысла.
- В каждом из заданий описывается жизненная ситуация, как правило, близкая к возникающим в повседневной жизни.
- Ситуация требует осознанного выбора модели поведения.
- Вопросы изложены простым языком, как правило, кратко, но требуют перевода с обыденного языка на язык математики.
- Используются иллюстрации: рисунки, таблицы и т.д.

## Что означают уровни математической грамотности?

Для описания достижений в области математической грамотности по итогам КДР7 установлены 3 уровня: **ниже базового, базовый и повышенный**.

*Базовый уровень* (пороговый) означает, что ученик начинает демонстрировать математическую грамотность – применение математических знаний и умений в простейших неучебных ситуациях.

*Повышенный уровень* означает, что ученик обладает математической грамотностью проявляет способность использовать имеющиеся математические знания и умения для получения новой информации и принятия решений.

*Уровень ниже базового* означает, что ученик не продемонстрировал математическую грамотность.

Описание количественных критериев достижения каждого из выделенных уровней приведено в таблице:

№ п/п	Уровень математической грамотности	Количественные критерии
1	Повышенный	Ученик выполнил более 5 заданий среднего или высокого уровня сложности и при этом не менее 2 заданий по любым трем компетентностным областям
2	Базовый	Ученик выполнил 5 и более заданий любого уровня сложности
3	Ниже базового	Ученик выполнил менее 5 заданий в работе

## Основные результаты

В краевой диагностической работе по математической грамотности приняли участие почти 27 тысяч семиклассников.

Чтобы получить объективные данные о ситуации с математической грамотностью в регионе, была сформирована представительная выборка из 11 школ разных типов, в которых во время проведения КДР7 присутствовали направленные ЦОКО наблюдатели, а работы учеников проверялись региональной комиссией. В 2021 году в выборку вошли примерно 700 учеников.

Все данные о результатах КДР7 по региону приведены на основе данных, полученных на этой группе учеников.

В среднем ученики, включенные в выборку, набрали **6 баллов из 25** возможных. Средний процент выполнения работы – **24%**.

<sup>3</sup> Ковалева Г.С. Оценка функциональной грамотности (презентация) [Электронный ресурс]. URL: [https://www.en-edu.ru/images/doc/ФГ/Ковалева\\_Оценка\\_функциональной\\_грамотности\\_26\\_02\\_2019.pdf](https://www.en-edu.ru/images/doc/ФГ/Ковалева_Оценка_функциональной_грамотности_26_02_2019.pdf)

Девочки выполнили работу чуть лучше мальчиков. В городских школах результаты в среднем на 6,5% выше, чем в сельских.

Границу базового уровня преодолели только **48%** семиклассников. И всего **7%** показали повышенный уровень. Таким образом, более половины семиклассников края не продемонстрировали математическую грамотность.

### Каковы результаты по компетентностным областям?

Рассмотрим результаты с точки зрения мыслительных процессов, которые являются ключевыми при выполнении задания (компетентностных областей).

#### Средний процент освоения компетентностных областей

№	Компетентностная область	Количество заданий (номера заданий)	Средний процент выполнения заданий этой области
1	Формулировать ситуацию математически	3 (5, 11, 12)	28%
2	Применять математические понятия, факты, процедуры	3 (1, 4, 8)	28%
3	Интерпретировать/оценивать математические результаты	4 (3, 10, 14, 15)	33%
4	Рассуждать	5 (2, 6, 7, 9, 13)	12%

Как видим, высокие результаты не фиксируются ни по одной области. Но задания из компетентностной области «рассуждать» семиклассникам даются труднее всего.

Проанализируем, как ученики выполняют задания, которое оценивают умения «применять математические понятия, факты, процедуры».

Компетентностная область «**Применять математические понятия, факты, процедуры**» включает следующие умения<sup>4</sup>:

- выбирать, разрабатывать и реализовывать подходящие стратегии поиска математических решений;
- использовать математический инструментарий, включая методы, для поиска точных или приближенных решений;
- применять математические факты, правила, алгоритмы и структуры при поиске решений;
- выполнять действия с числами, графическими и статистическими данными и информацией, алгебраическими выражениями и уравнениями, а также геометрическими фигурами;
- создавать диаграммы, графики, конструкции и извлекать из них математическую информацию;
- обобщать результат применения математических процедур для поиска решений;
- переключаться между различными представлениями в процессе поиска решений;
- размышлять над математическими аргументами, объяснять и обосновывать математический результат;
- оценивать значимость наблюдаемых (или предлагаемых) закономерностей и закономерностей в данных.

<sup>4</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://<https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning>

Предполагалось, что данная компетентность сформирована у семиклассников лучше всего, поскольку задания на применение правил, алгоритмов, формул и т.п. так или иначе встречаются в процессе обучения. Однако, видимо, эти задания обычно сформулированы стандартно, на математическом языке, с опорой на готовые математические модели, что не позволяет сформировать свободу в этой области. Даже с простой подстановкой данных в формулу у семиклассников возникают трудности.

Приведем примеры заданий низкого уровня сложности.

Здоровый образ жизни предполагает поддержку водного баланса организма. Его главный принцип можно сформулировать так: сколько воды организм человека потерял в течение суток, столько нужно восполнить.

Существует несколько способов рассчитать объём воды, необходимый конкретному человеку (не считая жидкость, которую получает человек с пищей). Приведём формулу, которая позволяет определить требуемый объём воды, учитывая вес (массу), пол человека и время активной физической нагрузки:

- $V = 0,03 \cdot m + 0,4 \cdot t$  — для женщин,
- $V = 0,04 \cdot m + 0,6 \cdot t$  — для мужчин,

где  $V$  – объём нормы воды (в литрах в сутки),  $m$  – масса тела человека (в килограммах),  $t$  – время (в часах) занятия спортом или других видов серьёзной физической нагрузки (если таких нагрузок нет,  $t = 0$ , в формулу ставится 0).

Тренер из спортивного клуба обязательно обсуждает со своими подопечными норму потребляемой ими воды.

**Задание 1.** Какой объём воды в литрах в сутки тренер посоветует потреблять юноше с массой тела 70 кг, который ежедневно тратит на занятие спортом в зале 2 часа?

**Ответ:** \_\_\_\_\_ л.

Справились 50%

Можно предположить, что при решении подобных задач ученикам сложно:

- переводить описанную жизненную ситуацию на математический язык;
- находить и извлекать разрозненную математическую информацию;
- отбирать информацию, поскольку задача обычно содержит избыточные сведения;
- применять математические знания, к которым они не обращались в последнее время на уроках.

Однако проверка работ показала, что ученики затрудняются совершенно в стандартных ситуациях, с которыми часто встречаются на уроках:

- нахождение значения выражения при заданном значении переменной;
- перевод часов в минуты.

Компетентностная область «**Интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты**» включает умения<sup>5</sup>:

- интерпретировать информацию, представленную в графической форме, на диаграммах;
- оценивать математический результат с точки зрения контекста;
- понимать «масштабы и ограничения» математических понятий и решений;
- интерпретировать математический результат в реальном контексте;
- оценивать обоснованность математического решения в контексте реальной задачи;

<sup>5</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://<https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning>

- понимать, как реальный мир влияет на математические результаты, процедуры или модели, чтобы делать суждения с учетом контекста, как результаты должны быть скорректированы или применены;
- объяснять, почему математический результат или вывод имеет или не имеет смысла с учетом контекста проблемы;
- критиковать и определять пределы модели, используемой для решения проблемы;
- использовать математическое мышление для прогнозирования, доказательства аргументов, тестирования и сравнения предлагаемых решений.

Приведем пример задания низкого уровня сложности.

**Задание 14.** В последнем столбце таблицы № 3 записан результат вычисления среднего арифметического асимметричности четырёх листьев по всем пяти признакам. Какой из листьев самый асимметричный (наиболее искривлён)?

**Таблица №3**

№ листа	Коэффициенты асимметричности $k$ четырёх листьев по пяти признакам					Среднее арифметическое асимметричности листа
	1	2	3	4	5	
1	0,020	0,027	0,125	0,2	0,107	$p = 0,096$
2	0,066	0,020	0,076	0,052	0	$p = 0,043$
3	0	0,019	0,090	0,125	0,081	$p = 0,063$
4	0,024	0,018	0	0,058	0,04	$p = 0,028$

*Впишите номер листа. Наиболее асимметричен (искривлён) лист № \_\_\_\_\_*

Справились 53%

Трудности при решении задач, требующих интерпретации математических результатов, в том числе данного задания, связаны преимущественно со следующими умениями:

- работать с задачей, представленной в форме, отличной от учебной;
- работать с информацией, представленной в различных формах (в первом случае, равенства – неравенства и словесное описание, во втором – табличная форма), соотносить их и интерпретировать одну через другую;
- критиковать и определять границы модели;
- понимать и объяснять, почему математический результат или вывод имеет или не имеет смысла с учетом контекста проблемы.

Задания, оценивающие умение **формулировать** реальные ситуации математически<sup>6</sup>:

- выбирать подходящую модель из списка предложенных;
- выявлять математические аспекты проблемы в реальном контексте и значимые переменные;
- распознавать математические структуры (включая закономерности, взаимосвязи и закономерности) в задачах или ситуациях;
- упрощать ситуацию или проблему, чтобы сделать ее поддающейся математическому анализу (например, путем разложения на отдельные задачи);

<sup>6</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning

- выявлять ограничения и предположения, лежащие в основе любого математического моделирования, и упрощения, которые позволяет делать контекст;
- представлять ситуацию математически, используя соответствующие переменные, символы, диаграммы и стандартные модели;
- представлять проблему по-другому, включая ее организацию в соответствии с математическими понятиями и соответствующими допущениями;
- понимать и объяснять связи между контекстно-зависимым языком проблемы и символическим, формальным языком, необходимым для ее представления на языке математики;
- переводить задачи на математический язык или давать им математическое представление;
- распознавать аспекты проблемы, соответствующие известным математическим понятиям, фактам или процедурам, задачам;
- создавать упорядоченные пошаговые инструкции, алгоритмы для решения задач.

Приведем пример задания низкого уровня сложности.

Кикшеринг — краткосрочная аренда самокатов. Сети кикшеринга предлагают несколько тарифов, стоимость зависит от максимально разрешённой скорости самоката и времени аренды. Посмотрите цены, чтобы сориентироваться.

Поминутные тарифы (время всегда округляется до полной минуты с избытком):

Максимально допустимая скорость, км/ч	Комиссия за старт, руб.	Стоимость одной минуты, руб.
15	35	5
20	35	6
25	35	8
30	35	9

Комиссия за старт взимается только при поминутном тарифе и только один раз за поездку: например, при аренде на 20 минут самоката с максимально разрешённой скоростью в 30 км/ч клиент заплатит 215 рублей ( $35 + 20 \cdot 9$ ).

**Задание 5.** Составьте формулу, по которой Иван может вычислить общую стоимость аренды самоката с максимальной допустимой скоростью в 25 км/ч по поминутному тарифу, если  $t$  – время поездки (в минутах),  $S$  – общая стоимость аренды (в рублях).

**Ответ:**  $S =$  \_\_\_\_\_.

Справились полностью 23%

Можно предположить, что при решении задач, относящихся к компетентностной области «формулировать ситуацию математически», в том числе данного задания, ученикам труднее всего:

- представлять ситуацию математически, используя соответствующие переменные, символы, выявлять математические аспекты проблемы в реальном контексте и значимые переменные;
- описывать ситуацию формулой, то есть составлять не числовое выражение (это учащиеся делают при решении текстовых задач), а формулу;
- работать не с готовыми, зачастую хорошо известными ситуациями и моделями, а составлять модель по предложенной ситуации;
- распознавать математические структуры (включая закономерности, взаимосвязи и закономерности) в задачах или ситуациях;
- работать с избыточными данными, выбирать нужные для данной задачи.

Задания компетентностной области «**Рассуждать**» оценивают умение размышлять над аргументами, обоснованиями и выводами, над различными способами представления ситуации на языке математики, в том числе<sup>7</sup>:

- делать вывод; выбирать и давать соответствующее обоснование, размышлять над аргументами, ходом рассуждений;
- представлять ситуацию различными способами, в том числе в соответствии с различными математическими теориями, делать соответствующие допущения; объяснять и защищать свои представления, модель.
- анализировать соответствие математической задачи и предложенной модели;
- определять, критиковать ограничения модели;
- объяснять отношения между контекстно-обусловленным языком проблемы и формально-символическим языком ее представления на языке математики;
- понимать и использовать определения, правила, алгоритмы и формальные системы; объяснять, как алгоритм работает, обнаруживать и исправлять ошибки в алгоритмах и процедурах;
- обосновывать выбираемые процедуры и модели с точки зрения получения результата; размышлять над математическим решением и создавать объяснения и аргументацию, которые его подтверждают или опровергают;
- давать математическую аргументацию полученному результату; объяснить его разумность в рамках ситуации; интерпретировать математический результат в контексте ситуации, объясняя полученный результат.

Приведем пример задания среднего уровня сложности.

**Задание 6.** Помогите Ивану определить, какой тариф выгоднее для самоката с максимально разрешённой скоростью в 20 км/ч: поминутный или почасовой, если поездка может занять от 55 минут до 60 минут.

*Отметьте знаком «V» более выгодный тариф.*

Поминутный

Почасовой

*Объясните свой ответ, подтвердив его вычислениями...*

Справились полностью – 3%, частично – 19%

**Критерии оценки**

Выбран ответ: **Почасовой.**

Дано верное обоснование: необходимо посчитать, при каком времени аренды плата по обоим тарифам будет равной:  $370 = 35 + 6 \cdot t$ ;  $t = 55 \frac{5}{6}$ .

Таким образом, при аренде на **55 минут выгоднее поминутный** тариф, а при аренде **от 56 до 60 минут включительно выгоднее почасовой тариф** (в одном случае выгоден поминутный и в пяти случаях – почасовой).

ИЛИ

Выбран ответ: **Почасовой.**

Обоснование присутствует, но опирается на конкретные примеры (не охватывающие все варианты), при этом приведено **не менее двух** подтверждающих выгоду почасового тарифа примеров:

<sup>7</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning

$$35 + 6 \cdot 60 = 395 > 370; 35 + 6 \cdot 59 = 389 > 370; 35 + 6 \cdot 58 = 383 > 370; 35 + 6 \cdot 57 = 377 > 370; 35 + 6 \cdot 56 = 371 > 370).$$

При решении задач, требующих умения строить математические рассуждения, в том числе данного задания, ученикам сложно:

- использовать перебор возможных вариантов, метод проб и ошибок;
- отбирать информацию среди избыточной;
- находить и удерживать все условия, необходимые для решения и его интерпретации;
- давать математическую аргументацию полученному результату, объяснить его разумность в рамках ситуации, интерпретировать математический результат в контексте ситуации в целях объяснения полученного результата, опираясь в том числе на здравый смысл;
- представлять обоснование решения в словесной форме.

### Каковы результаты по содержательным областям?

Теперь рассмотрим результаты КДР7 относительно содержания математического образования, которое используется в заданиях (предметное ядро функциональной грамотности).

Математическое содержание распределено по четырём категориям:

- *количество* (арифметические действия с числами);
- *пространство и форма* (геометрический материал);
- *изменения и зависимости* (алгебраический материал в части работы с зависимостями между переменными в разных процессах);
- *неопределенность и данные* (вероятностные и статистические явления и зависимости, а также переструктурирование данных, представленных в разной форме: графики, диаграммы и пр.).

Эти четыре области охватывают основной диапазон математических знаний, необходимых 15-летним учащимся для жизни и дальнейшего расширения их математического кругозора. Предметный материал является традиционным для большинства программ по математике.

Приведем результаты, показанные семиклассниками.

#### Средний процент освоения содержательных областей

№	Содержательная область	Количество и номер а заданий	Средний процент выполнения заданий области
1	Количество	4 (№ 4 – 7)	16%
2	Пространство и форма	4 (№ 8 – 11)	25%
3	Изменения и зависимости	3 (№ 1 – 3)	29%
4	Неопределенность и данные	4 (№ 12 – 15)	26%

Очень близкие результаты получены по содержательным областям *«Пространство и форма»*, *«Изменения и зависимости»* и *«Неопределенность и данные»*: ученики успешно справляются примерно с четвертью заданий. Однако ещё труднее семиклассникам оказалось выполнить задания из содержательной области *«Количество»* – среднее выполнение лишь 16%.

Более детальное представление об освоении содержательных областей дает сравнение результатов по заданиям разного уровня сложности.

Начнем с содержательной области *«Изменения и зависимости»*.

Приведем пример задания высокого уровня сложности.



Задание 3. Отметьте знаком «V» все верные утверждения в таблице.		
№	Утверждение	Верное утверждение
1	Мужчина и женщина, имеющие одинаковую массу тела и занимающиеся спортом по 1 часу в день, должны выпивать за сутки одинаковый объём воды.	
2	Если масса человека не меняется, а время физических нагрузок увеличивается, ему нужно пить больше воды.	
3	Мужчине необходимо пить больше воды, чем женщине, если у них нет физических нагрузок ( $t = 0$ ).	
4	Ирине и Татьяне рекомендована одинаковая норма воды в сутки. У Ирины масса тела больше, чем у Татьяны, значит, Ирина тратит меньше времени на физическую активность.	
Справились полностью 19%, частично (выбрано одно из двух верных утверждений и не выбраны неверные) - 6%		

Помимо трудностей, связанных с оценкой истинности любых утверждений о зависимостях, здесь необходимо было не поддаваться инерции житейских представлениям о большем весе мужчин по сравнению с женщинами (третий вариант ответа).

В целом в содержательной области «Изменения и зависимости» больше всего трудностей у семиклассников вызвали перевод единиц измерения времени, оценка полученного результата на принадлежность к указанному допустимому интервалу, а также определение истинности или ложности утверждений о линейной зависимости.

Рекомендуется включать в систематическую работу задания, где требуется на основе анализа зависимости самостоятельно оценивать истинность утверждений, а также самостоятельно формулировать и проверять утверждения о зависимостях, представленных в разных формах (формула, таблица, график, словесное описание), сравнивать формулы, определяя изменяющиеся характеристики, в т.ч. отличать параметры от переменных величин. Такие задания могут иметь и межпредметный характер (математическое описание физических или других процессов). Также важно чаще предлагать ученикам задания, требующие переструктурирования данных.

Следующая по успешности освоения содержательная область – «*Неопределенность и данные*», в основном требующая умения работать с массивом данных в табличном виде и определять статистические характеристики.

Приведем пример задания высокого уровня сложности. В первой части задания описана ситуация (проведение школьником учебного экологического исследования) и приведён массив данных – результаты измерений по пяти параметрам обеих половинок 10 листьев - структурированный в виде таблицы. Текст самого задания представляет собой перечень утверждений, из которых нужно выбрать верное. Приведем полностью только текст задания, а вводную часть сократим.

### Исследование чистоты воздуха

Для участия в школьной конференции ученик 8 класса Павел провёл исследование – по асимметричности листьев берёзы он оценил загрязнённость атмосферного воздуха в своём посёлке. Листья для изучения он брал в трёх разных местах посёлка: у цеха по производству полиэтиленовой упаковки, у здания клуба и у здания старой школы.

Признаки, используемые для оценки асимметричности листьев, показаны на рисунке № 1.

**Рисунок 1**



Описание рисунка 1

Признак 1 – ширина половинки листа в его середине;

Признак 2 – длина второй от основания листа жилки;

Признак 3 – расстояние между основаниями первой и второй жилок;

<...>

В таблице № 1 приведены результаты измерений пяти признаков у листьев берёз, растущих у здания старой школы. Все измерения Павел сделал для левой и правой части каждого из листьев.

Таблица № 1

Признаки асимметричности										
№	Ширина половинки листа		Длина второй жилки		Расстояние между основаниями 1-й		Расстояние между концами 1-й и 2-й жилок		Угол между 2-й и главной жилками	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ листа	Левая часть листа	Правая часть листа	Левая часть листа	Правая часть листа	Левая часть листа	Правая часть листа	Левая часть листа	Правая часть листа	Левая часть листа	Правая часть листа
1	2,4	2,5	3,6	3,8	0,7	0,9	0,6	0,4	62	50
2	1,6	1,4	2,4	2,5	0,6	0,6	1	0,9	50	50
3	1,6	1,6	2,5	2,5	0,6	0,5	0,7	0,9	40	34
...										

Задание 12. Изучите таблицу № 1. Отметьте знаком «V» все верные утверждения ниже.

№	Утверждение	Верное утверждение
1	Если в каждом из трёх мест Павел для исследования возьмёт по 10 листьев, то ему нужно будет сделать 300 измерений.	
2	Самое часто встречающееся значение, полученное при измерении левых половинок листа по признаку 4, равно 1,1.	
3	Среднее арифметическое значений, полученных при измерении по признаку 5 правых половинок, равно 4,94.	
4	Разница между наибольшим и наименьшим значением измерений по признаку 5 для левой части листа равна 25.	

Справились полностью 21 %

Ученикам сложно находить нужные данные в достаточно большом массиве, удерживая все необходимые условия,

Обратим внимание, что в задании напрямую используется только один термин статистики (среднее арифметическое) все остальные характеристики массива данных (мода, размах, объем ряда данных) определены в самих утверждениях, что, однако, незначительно повлияло на решаемость заданий. Вероятно, решаемость была бы выше, если ряд был бы представлен в виде отдельной упорядоченной последовательности чисел.

При изучении школьного курса математики рекомендуется чаще предлагать ученикам задания, требующие переструктурирования данных и самостоятельного составления необходимого для анализа ряда.

Следующая по успешности освоения содержательная область – «Пространство и форма». Приведем пример задания высокого уровня сложности.

Кухонный гарнитур семьи Думовых занимает всю стену. Он включает ряд шкафов со встроенной техникой глубиной 60 см и общей длиной 480 см (в общую длину включена также угловая мойка размером 80 x 80 см).



**Задание 8.** Папа решил уложить пол кухни-гостиной керамической плиткой размером  $35 \times 35$  см, исключая место под вмонтированными в пол камином и кухонным гарнитуром с мойкой. Он поручил сыну Егору сделать расчёты. Сын выполнил задание.

**Расчёты Егора:**

Площадь пола (без камина и гарнитура, включающего мойку):  $123000 \text{ (см}^2\text{)}$

Площадь одной плитки:  $35 \times 35 = 1225 \text{ (см}^2\text{)}$

Получив такие данные, Егор разделил площадь пола на площадь одной плитки

$$123000 : 1225 \approx 100,408 \dots$$

и сообщил отцу, что для пола в гостиной нужно купить 100 плиток.

**А. Согласны ли вы с ответом Егора о достаточном количестве плитки? Отметьте ответ знаком «V» и запишите объяснение.**

ДА       НЕТ

**Объяснение:** \_\_\_\_\_

**Б. Согласны ли вы со способом вычислений Егора? Отметьте ответ знаком «V» и запишите объяснение.**

ДА       НЕТ

**Объяснение:** \_\_\_\_\_

Справились с заданием полностью 0,3% учеников, частично – 18%

Столь низкая результативность, помимо вычислительных ошибок, связана с использованием представлений о замощении плоскости (части плоскости, ограниченной многоугольником) геометрическими фигурами. Основная сложность для семиклассников заключалась в удерживании связи представлений о площади как количественной величины и площади геометрической фигуры определённой формы, замощаемой фигурами другой геометрической формы или с другими линейными размерами. В данном задании пол комнаты имеет смысл разбить на прямоугольники разного размера. Остающиеся после замощения квадратными плитками пола зазоры требуют увеличения количества замощающих фигур, т.е. увеличения количества плиток. Их количество не соответствует приближенному значению, полученному по правилу округления десятичных дробей до целого числа. Выполняя задание, школьники подменяют задачу (определить количество

необходимого материала) и решают формальное задание-упражнение – округлить десятичную дробь до целого числа.

На уроках математики рекомендуется чаще использовать задания, для которых ученики сами должны определить способ решения, могут получать разные ответы, обсуждать и обосновывать свои решения.

Хуже всего ученики справились с заданиями из содержательной области **«Количество»**, где требуются в основном арифметические действия с числами.

Пример задания высокого уровня сложности.

**Задание 7.** Иван решил летом помочь старшему брату в его фирме, предоставляющей услуги кикшеринга. Брат захотел ввести почасовой тариф и для самокатов с максимально допустимой скоростью в 15 км/ч. Он поручил Ивану рассчитать стоимость одного часа по новому тарифу.

Чтобы помочь Ивану, брат передал ему расчёты стоимости 1 часа по почасовому тарифу для самоката с максимально допустимой скоростью в 30 км/ч:

*«Начиная с 52 минуты, почасовой тариф становится выгоднее для клиента, чем поминутный. При аренде самоката на 51 минуту клиент по поминутному тарифу заплатит 494 рубля ( $35 + 51 \cdot 9$ ), а при аренде на 52 минуты – 503 рубля ( $35 + 52 \cdot 9$ ), поэтому плата за час аренды по почасовому тарифу, например, в 500 руб., вполне адекватна».*

Запишите в соответствующую ячейку таблицы все возможные варианты стоимости 1 часа по почасовому тарифу для самоката с максимально допустимой скоростью в 15 км/ч. Важно, чтобы при поездке от 58 минут (не ранее) оплата по почасовому тарифу была более выгодной для клиента, чем существующий поминутный тариф.

Максимально допустимая скорость самоката, км/ч	Стоимость одного часа, руб.
15	
20	370
25	440
30	500

Справились с заданием полностью 1,4% учеников

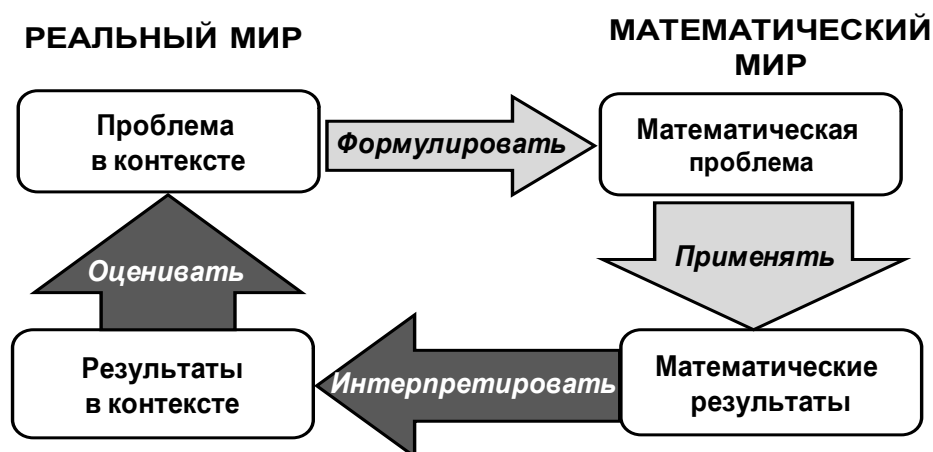
Задания средней и высокой сложности этой содержательной области в работе предполагают владение умением рассуждать и формулировать, однако столь низкий процент выполнения дает основания полагать, что семиклассники недостаточно владеют умением выполнять действия с рациональными числами в ситуации «зашумления», им трудно выбирать нужные данные для вычислений и сравнивать полученные величины, учитывать введенные ограничения, оценивать полученные результаты, т.е. использовать умение выполнять арифметические операции (в том числе сравнение трёхзначных чисел) на высоком компетентностном уровне, рассуждения затруднены невозможностью легко получить нужные для анализа результаты вычислений и их структурировать так, чтобы получить и верный ответ, и полное обоснование.

В подавляющем большинстве школьники не показали и умения работать с множеством ответов – лишь те, кто справились с заданием 7 полностью (1,4% учеников), указали хотя бы два верных ответа, не включая в них граничные значения. Заметим, что в задании 7 приведен образец рассуждения, но и такую опору школьники не смогли использовать для верного решения.

Рекомендуется на уроках математики чаще использовать задачи-ситуации, которые предполагают самостоятельное нешаблонное движение учеников – построение модели, выбор способа решения, оценка полученных результатов и т.д. Формированию таких умений могут способствовать предметные задания как исследовательского, так и проектного типа, требующие от учеников использования всего «арифметического арсенала».

### Что необходимо сделать для развития математической грамотности?

Приведем схему, объясняющую связь четырех компетентностных областей<sup>8</sup>.



То, что учащимся обычно лучше удается выполнять задания, требующие применять математические понятия, факты, процедуры, объясняется тем, что в заданиях из учебников, с которыми идет работа на уроках, строится в лучшем случае именно переход от математической проблемы к математическому результату. Реже ученикам предлагается интерпретировать полученный математический результат в реальном контексте и с этой точки зрения оценивать его. Они почти не сталкиваются с ситуациями, где требуется выявлять математические аспекты реальной проблемы, выявлять значимые переменные и формулировать ситуацию математически, выбирая подходящую модель.

Однако в этом году ученики справились одинаково слабо как с заданиями из компетентностных областей «формулировать» и «интерпретировать», так и с заданиями, требующими «применять математические понятия, факты, процедуры».

Для успешного формирования математической грамотности важно развивать когнитивную сферу учеников, задаваться вопросами об окружающем мире. Педагоги должны предлагать учащимся не только готовые, сформулированные стандартно, на математическом языке задания, но и учить математическому моделированию реальных ситуаций, переносить способы решения учебных задач на жизненные проблемы, обеспечивать опыт поиска путей решения жизненных задач.

Необходимо учить ребят работать с задачей, представленной в форме, отличной от учебной, для решения привлекать информацию, использовать личный опыт, работать с информацией, представленной в различных формах (текста, таблицы, диаграммы, схемы, рисунка, чертежа), учить отбирать информацию, для этого задача должна содержать избыточную информацию.

Предлагаемые задачи должны позволять задавать самостоятельно точность данных с учетом условий задачи, использовать здравый смысл при подборе методов решения,

<sup>8</sup> Приоритетное направление исследования PISA -2021: оценка математической грамотности Л.О. Рослова, заведующий лабораторией общего математического образования и информатизации, Институт стратегии развития образования Российской академии образования

осуществлять перебор возможных вариантов. Задачи должны решаться разными способами, требовать представления обоснования решения в словесной форме.

Ученикам редко встречаются задания с выбором ответов, среди которых несколько правильных. Наличие нескольких верных ответов может позволить увидеть разные формулировки одного и того же понятия или рассмотреть с разных сторон одно и то же явление.

И важно обязательно помнить о системности формируемых математических знаний, о необходимости теоретической базы, поскольку без устойчивых знаний их функциональное применение невозможно.

Итак, еще раз перечислим требования к заданиям, систематическое использование которых, позволит рассчитывать на формирование математической грамотности.

Предлагаемые задания должны:

- ▶ быть сформулированы не стандартно, **без опоры на готовые математические модели**, не на математическом языке и на языке, отличающемся от языка формирования математических понятий;
- ▶ требовать **выявлять математические аспекты реальной проблемы**, выявлять значимые переменные и формулировать ситуацию математически, выбирая подходящую модель;
- ▶ требовать **описывать ситуацию формулой**, то есть составлять не числовое выражение (это учащиеся делают при решении текстовых задач), а формулу;
- ▶ требовать **работать не с готовыми**, зачастую **хорошо известными** ситуациями и **моделями**, а **составлять их** по предложенной ситуации;
- ▶ требовать для решения привлечения (извлечения) **разрозненной информации**, представленной **в различных формах** (текста, таблицы, диаграммы, схемы, рисунка, чертежа), учить отбирать информацию (для этого задача должна содержать *избыточную информацию*), привлекать информацию, **используя личный жизненный опыт**;
- ▶ требовать **интерпретации полученного математического результата в реальном практическом контексте** и оценки математического результата с этой точки зрения;
- ▶ позволять ученикам **самостоятельно задавать точность данных с учетом условий задачи**, **использовать здравый смысл** при подборе методов решения, **осуществлять перебор возможных вариантов**;
- ▶ решаться **разными способами**, требовать **обоснования решения в словесной форме**;
- ▶ предлагать **выбор ответов, среди которых несколько правильных**, что позволит увидеть разные формулировки одного и того же понятия или рассмотреть с разных сторон одно и то же явление;
- ▶ **не относиться однозначно к конкретной области математики** (алгебре, геометрии, анализу), а предполагать выбор или переход от одной к другой.

Для того чтобы ученики успешно справлялись с подобными заданиями, учителям необходимо включать в систематическую учебную работу давно известные наработки/приёмы:

- ▶ **практико-ориентированные задания и задания полипредметного характера** (адресующие ученика как к нескольким предметным областям, так и к разным областям внутри математики), требующие построения новых или выбора известных моделей для их решения;
- ▶ задания на использования **«остаточных знаний»**, что требует обращения не только к актуальному материалу школьной программы;
- ▶ **поисковый метод**, позволяющий ученикам осуществлять **самостоятельную работу** по выбору, открытию способов, оценки результата, исследованию закономерностей и формулированию утверждений о них для последующей проверки на правдоподобность.
- ▶ другие педагогические средства, позволяющие ученикам нарабатывать владение всё более широким диапазоном математических понятий и умений на **компетентностном уровне**.